

## МАТЕМАТИКА 2

### Први колоквијум (19.4.2008) - Група 6

1. Испитати непрекидност функције  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  у тачки  $(0,0)$  ако је

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^5}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Решење: а) Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^5}{x^4+y^4} + \frac{|y|^5}{x^4+y^4} = \frac{x^4}{x^4+y^4}|x| + \frac{y^4}{x^4+y^4}|y| \leq |x| + |y|$$

слиеди  $|f(x,y)| \rightarrow 0$  када  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , а то значи да и  $f(x,y) \rightarrow 0$  када  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Како је  $f(0,0) = 0$ , функција  $f$  је непрекидна у тачки  $(0,0)$ .

б) Из  $f(0,0) = 0$  и  $f(x,0) = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  када  $x \rightarrow 0_+$  слиеди да функција  $f$  у тачки  $(0,0)$  има прекид, односно није непрекидна.

2. Одредити Тејлоров полином другог реда који у околини тачке  $M(1,-1)$  апроксимира функцију  $f: (x,y) \mapsto z$  дефинисану имплицитно са

$$z^3 + xyz + x^2 - 2y^2 + 1 = 0, \quad z > 0.$$

Решење: За  $x = 1$  и  $y = -1$  из дате једнакости и услова  $z > 0$  добијамо  $\boxed{z(M) = 1}$ .

Диференцирањем по  $x$  дате једнакости имамо

$$3z^2 z'_x + yz + xyz'_x + 2x = 0, \quad (1)$$

одакле заменом  $x = z = 1$ ,  $y = -1$  добијамо  $\boxed{z'_x(M) = -1/2}$ .

Слично, диференцирањем дате једнакости по  $y$  имамо

$$3z^2 z'_y + xz + xyz'_y - 4y = 0, \quad (2)$$

одакле добијамо  $\boxed{z'_y(M) = -5/2}$ .

Диференцирањем једнакости (1) по  $x$  и заменом  $x = z = 1$ ,  $y = -$  и  $z'_x = -1/2$  добијамо  $\boxed{z''_{x^2}(M) = -9/4}$ , а диференцирањем једнакости (1) по  $y$  и заменом наведених вредности, као и  $z'_y = -5/2$ , добијамо  $z''_{xy}(M) = -21/4$ .

Диференцирањем једнакости (2) по  $y$  и заменом одговарајућих вредности добијамо  $\boxed{z''_{y^2}(M) = -57/4}$ .

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције  $f$  у тачки  $M$  имамо

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{2}(y+1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 - \frac{21}{4}(x-1)(y+1) - \frac{57}{8}(y+1)^2 \\ &= -4 - \frac{7}{2}x - \frac{23}{2}y - \frac{9}{8}x^2 - \frac{57}{8}y^2 - \frac{21}{4}xy. \end{aligned}$$

**3.** Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = x^2 + y^2$  при услову  $xy = x + y$ .

*Прво решење:* Из услова следи  $y = \frac{x}{x-1}$  (јер је  $x \neq 1$ ), па је (при том услову)

$$f(x, y) = x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = g(x).$$

Како је

$$g'(x) = \frac{2x}{(x-1)^3}(x-2)(x^2-x+1),$$

то функција  $g$  у тачки  $x = 2$  има локални минимум. Према томе,  $f_{\min, xy=x+y} = f(2, 2) = 8$ .

*Друго решење:* За Лагранжову функцију  $F$ , где је

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - x - y),$$

имамо

$$F'_x = 2x + \lambda y - \lambda, \quad F'_y = 2y + \lambda x - \lambda.$$

Из једнакости  $F'_x = 0$  и  $F'_y = 0$  добијамо  $2(x-y) = \lambda(x-y)$ .

Ако је  $x = y$ , тада из датог услова следи  $x = 2$  (јер је  $x > 0$ ) и  $\lambda = -4$ , па имамо стационарну тачку  $A(2, 2)$ . Ако је  $\lambda = 2$ , тада имамо систем  $x + y = 1$ ,  $xy = 1$  који нема реалних решења.

Како је  $F''_{x^2} = 2$ ,  $F''_{xy} = \lambda$ ,  $F''_{y^2} = 2$  и  $dy = -dx$  при датом услову, то је

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2dx^2 + 2\lambda dx dy + 2dy^2 \\ &= 2dx^2 - 8dx dy + 2dy^2 \\ &= 12dx^2. \end{aligned}$$

Према томе,  $d^2F(A) > 0$  за  $dx \neq 0$ , па  $f$  у тачки  $A$  има **локални минимум**.

Драган Ђорић